

# محاضرات الدفتر

القسم : رياضيات السنة : الرابعة / صبر المادة : صيغيات المحاضرة : الأولى

المجموعات المرتبة

نقول عن العلاقة الثنائية  $R$  المعرفة على المجموعة  $E$  التالية :  
إذا كانت  $x, y \in E$  فنقول  $x R y$  إذا وفقط إذا كانت  $x$  و  $y$  متساويين.

$$(1) \text{ انعكاسية } \forall x \in E : x R x$$

$$(2) \text{ تماثلية } x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

$$(3) \text{ متدية } \forall x, y, z \in E : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

من أجل إثبات أن  $R$  هي علاقة ترتيب على  $E$  نلاحظ أن  $x R y$  يعني  $x = y$  وهذا يعني أن  $x$  و  $y$  متساويان. وبذلك نكون قد أثبتنا أن  $R$  هي علاقة ترتيب على  $E$ .

أي المجموعة  $E$  المزودة بعلاقة ترتيب هي مجموعة مرتبة.

أمثلة :

- (1) مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  المزودة بعلاقة الترتيب المعتادة هي مجموعة مرتبة.
- (2) مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}^+$  (أي الأعداد الطبيعية الموجبة) المزودة بعلاقة الترتيب المعتادة هي مجموعة مرتبة.

$$\text{وهي أيضاً مجموعة مرتبة } x = a \text{ و } y = b \text{ و } a \in \mathbb{N}^+$$

- (3) مجموعة أجزاء المجموعة  $E$  التي نرسمها بالرمز  $\mathcal{P}(E)$  المزودة بعلاقة الترتيب المعتادة هي مجموعة مرتبة.

سوف نستخدم الرمز التالي :

$$x \leq y : x \text{ ليست أكبر من } y$$

$$x < y : x \text{ أصغر من } y \text{ أي } x \leq y \text{ و } x \neq y$$

ونقول عن العنصرين  $x$  و  $y$  أنهما متقاربان إذا كانت

$$x \leq y \text{ و } y \leq x$$

وهذا يعني أن  $x = y$  أي أن العنصرين متساويان.

نقول عن علاقة الترتيب أن تكون علاقة ترتيب إذا كانت علاقة ترتيب على المجموعة  $E$  المزودة بالعلاقة  $R$  التالية :

أمثلة :

- (1)  $\mathbb{N}$  مع علاقة الترتيب المعتادة هي سلسلة (ترتيب كلي).



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

- (2)  $N$  مع علاقة يتم لست علاقة  
(3)  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  مع علاقة الرتبة لست علاقة

ملاحظة :

في حالة العلاقة إذا كان  $x$  فإن  $x \in A$

الترتيب العكسي

لكن (ي) (ب) مجموعة مرتبة يمكن عكسها لتعرف علاقة جديدة  $\leq$  مع  $\geq$  ترتيب :  $\leq$  و  $\geq$  التي تكافئ :  $x \leq y$  يمكن التحقق بسهولة أن علاقة ترتيب مع  $\leq$  من نوع العلاقة  $\leq$  بـ  $\geq$  بـ  $\leq$  الترتيب العكسي للعلاقة  $\leq$

الترتيب المولد (أو متجهو علاقة الترتيب)

لكن (ي) (ب) مجموعة مرتبة  $A$  مجموعة جزئية من  $A$  علاقة الترتيب  $\leq$  مع  $A \times A$  هي علاقة ترتيب مع  $A$  فرعي لا فارغ  $\neq \emptyset$  و المعرفة بالحد :  
إذا كان  $x \in A$  و  $y \in A$  متعلقين هذه العلاقة علاقة الترتيب المولد  
بـ  $\leq$  مع  $A$

ملاحظة :

لكن البنية الرتبة  $(A, \leq)$  ولكن  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$   
نلاحظ أن  $A$  هي علاقة من أجل الترتيب المولد من أجل الترتيب  $\leq$  لست علاقة لست  $N$   
ليست علاقة

ترتيب الجداد :

لكن  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  في أسرة من المجموعات المرتبة  $\subseteq$  تعرف مع مجموعة الجداد  $\mathcal{P}(A)$   
 $e \in A$

العلاقة :  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  هي علاقة ترتيب مع  $\subseteq$  من أجل  $\subseteq$  :  $e \in A$

معين البرهان بسهولة أنه  $\subseteq$  هي علاقة ترتيب مع  $\subseteq$  :  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$  مع  $\subseteq$   
علاقة ترتيب الجداد



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

\* حالة خاصة  
لنكن  $\mathcal{F}(E, F)$  مجموعة الدوال من  $E$  إلى  $F$  فيكون  $\mathcal{F}(E, F)$  مجموعة مع المجموعة  $F$  أي مع  
 $\prod_{x \in E} F_x$  حيث  $F_x = F$  أي أنه يمكن مطابقة كل  $x \in E$  بـ  $F$  أي  $F \rightarrow F$

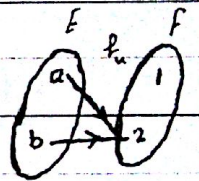
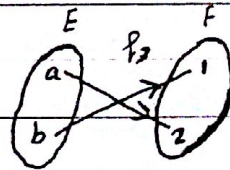
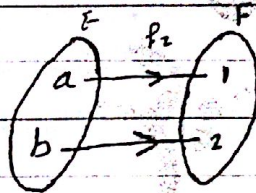
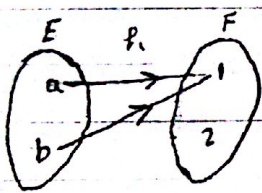
مع  $(f(x))$  فإذا كانت  $f$  مجموعة مرتبة عدديّة تعرف عدديّة ترتيب الدوال في المجموعة  $\mathcal{F}(E, F)$   
بشكل التالي  $g \leq f$  إذا وفقط إذا كان  $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E$

للتوضيح :

إذا كانت  $E = \{a, b\}$  و  $F = \{1, 2\}$  فإن  $F^E = \mathcal{F}(E, F)$  عندها فإن  $F^E$  يمكن أن يكون :

$$F^E = F \times F = F^2$$

$$F^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$



$f_1 \leq f_2$  إذا ففقت

$$\begin{cases} f_1(a) \leq f_2(a) \\ f_1(b) \leq f_2(b) \end{cases} \Leftrightarrow f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in E$$

ملاحظة :

إن جدلي سلسل له بالترتيب سلسلة

مثال :

في مجموع السلسلة  $(\mathbb{N}, \leq)$  فإن الزوجين  $(1, 6)$  و  $(2, 6)$  يرتبان لأن  $(1, 6) \leq (2, 6)$  حيث  $(\mathbb{N}^2, \leq)$  ليست سلسلة



# محاضرات الدفتر

القسم :

المادة :

السنة :

المحاضرة :

مورفزمات الجوى ت المرتبة :

لكن (ك، ع) و (ف، ع) مجموعتين جزئيتين  $f: E \rightarrow F$  تطبيق من  $E$  إلى  $F$   
 حيثما يتولد من  $f$  بأنه مورفزم ترتيب أو تطبيق ترتيب إذا كانت  
 $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

كما نرى التطبيق الترتيبى تماماً :  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$   
 والتطبيق المتناقص :  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$   
 والتطبيق المتناقص تماماً :  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$

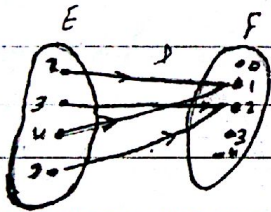
ملامح :

(1) التطبيق الترتيبى يكون بنفس الوقت ترتيب ومتناقص ولكن العكس صحيح بالضرورة

مثال :

لكن المجموعة  $\{1, 2, 3, 4\}$  مرتبة بملامح يتيم و  $F = N$  مع علامة الترتيب  
 العادي . نعرف  $f$  كما يلي :

$f(1) = f(2) = 1$  ،  $f(3) = f(4) = 2$  فإن  $f$  يكون ترتيب ومتناقص بنفس الوقت  
 ولكنه ليس تامة



$2 \leq 4 \Rightarrow f(2) \leq f(4)$   
 ترتيب 2 1 1

$3 \leq 4 \Rightarrow f(3) \leq f(4)$   
 ترتيب 2 2 2

متناقص لأنه  $f(1) \geq f(2)$  و  $f(3) \geq f(4)$

(2) كل تطبيق ترتيب ومتناقص يكون ترتيب تماماً ولكن بالضرورة أن كل تطبيق ترتيب تماماً ليس متناقصاً

مثال : لنأخذ نفس الجوى ت المثال السابق حيث أن

$f(1) = 3$  ،  $f(2) = 1$  ،  $f(3) = f(4) = 2$

ملامح أن  $f$  ترتيب تماماً ولكنه ليس متناقصاً

٤



## محاضرات الدفتر

## المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

(3) إذا كان  $f$  متزايدة، فإن التجميع العكسي له أي  $f^{-1}$  لا يكون بالضرورة متزايداً.

مثال:  
إذا كانت  $\{1, 2, 3, 4\} = f$  والعلاقة المعرفة على  $f$  علاقة تقيس  $R = 1$   
و  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = f$  والعلاقة المعرفة على  $f$  علاقة تقيس  $R^* = 1$   
والجيبين بالمثل:

$$f(2) = 2 \qquad f(3) = 4 \qquad f(4) = 8$$

نلاحظ ان  $\mu$  متزاية ومتناهي ولكن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$  :

$$f^{-1}(2) = 2 \quad f^{-1}(4) = 3 \quad f^{-1}(8) = 2$$

اے

$$2 \leq u \Rightarrow f^{-1}(2) \neq f^{-1}(u)$$

حصان آخر :

التجسيم الخاص من  $(1, N^+)$  ثم  $(N^+, N^+)$  هو تقابل متزايد ولكن طبيعته العكسية  
ليس متزايد